

1. Группы и полугруппы.
2. Простейшие группы. Таблицы умножения и их свойства. Примеры.
3. Подгруппы. Порядок элемента. Сдвиг по группе. Циклические группы. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
4. Сопряженные элементы. Инвариантные группы. Фактор-группа.
5. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Теорема Нетер (гомоморфизмы и инвариантные подгруппы).
6. Представления (линейные конечномерные непрерывные) групп. Примеры групп ($SO(2)$, $SO(3)$, $GL(n, R)$, $GL(n, C)$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(1, n-1)$) и их представлений (векторные и тензорные представления).
7. Эквивалентные представления. Теорема о существовании унитарного представления в классе эквивалентных представлений для конечных групп.
8. Приводимые и неприводимые представления. Теорема о разложении всякого унитарного приводимого представления в прямую сумму неприводимых унитарных представлений.
9. 1-ая лемма Шура. 1-ая теорема ортогональности функций на группе, порождаемых неприводимым представлением.
10. 2-ая лемма Шура. 2-ая теорема ортогональности функций на группе, порождаемых неприводимыми неэквивалентными представлениями.
11. Теорема о полноте функций на группе, порождаемых неприводимыми неэквивалентными представлениями. Теорема Бернсайда.
12. Характеры представлений. 9 свойств характеров представлений.
13. Число неприводимых неэквивалентных представлений равно числу классов сопряженных элементов.
14. Пример: все о группе D_3 – таблица умножения, подгруппы, инвариантная подгруппа, гомоморфизмы, классы, представления, характеры.
15. Прямое произведение матриц, свойства.
16. Прямое произведение представлений группы. Разложение Клебша-Гордана. Характер прямого произведения. Коэффициенты Клебша-Гордана.
17. Еще один способ построения прямого произведения представлений групп (операторами $A: L_1 \rightarrow L_2$). Характер. Сопряженное представление.
18. Прямое произведение групп. Представления групп, имеющих вид прямого произведения.
19. Специфика представлений бесконечных групп (приводимость и вполне приводимость). Непрерывные группы (возможность многозначных непрерывных представлений). Универсальная накрывающая группа.
20. Группы Ли. Компактные группы. Функционал усреднения (инвариантное интегрирование) на группах. Теория представлений - обобщение теории представлений конечных групп на компактные группы.
21. Группы Ли. Примеры. Представления групп Ли. Инфинитезимальные операторы. Пример - группа $SO(3)$.
22. Теория представлений групп Ли. Три теоремы Ли. Инфинитезимальное представление группы Ли.
23. Группа $SO(2)$ -однопараметрическая компактная группа Ли. Все неприводимые представления $SO(2)$. Характеры. Универсальная накрывающая группа группы $SO(2)$.
24. Группа $SO(3)$ -трехпараметрическая компактная группа Ли. Различные параметризации. Векторное представление, инфинитезимальные операторы, структурные константы. Функционал усреднения (инвариантное интегрирование на группе $SO(3)$). Универсальная накрывающая группа группы $SO(3)$.
25. Неприводимые представления группы $SO(3)$. Канонический базис. Вес представления.
26. D-функции (функции Вигнера). Вывод выражения для D-функций. Основные свойства.
27. Спинорные и тензорные представления группы $SO(3)$. Произведение представлений.

Литература.

1. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применения в физике.
2. Любарский Г.Я. Теория групп и физика.
3. Гельфанд И.М. Представления группы вращений и группы Лоренца.
4. Эллиот Дж., Добер. П. Симметрия в физике.