МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Задачи для практических занятий (5 семестр)

Сборник задач по математической физике Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов
Задачи по уравнениям математической физики М. М. Смирнов

Приведение к каноническому виду уравнений в частных производных.

Привести уравнения к канонической форме в областях эллиптичности и гиперболичности.
I-2. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.
I-3. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.
I-5. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.
Привести уравнения к канонической форме.
I-15. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.
I-16. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.
I-17. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.
Привести линейные уравнения с постоянными коэффициентами к канонической форме.
I-21. $au_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$.
I-22. $2au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + 2bu_x + 2cu_y + u = 0$.

Постановка краевых задач - написать уравнение, выяснив смысл исследуемой физической величины, сформулировать граничные и начальные условия, обосновать выбор системы координат.

II-1. Продольные колебания стержня. Упругий прямолинейный стержень выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения стержня все время остаются плоскими, поставить краевую задачу для определения смещений поперечных сечений стержня при $t > 0$. Рассмотреть случаи, когда концы стержня

а) закреплены жестко,

б) двигаются в продольном направлении по заданному закону,

в) свободны

г) закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

II-4. Продольные колебания газа в трубке. Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются, все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Поставить краевые задачи для определения 1) плотности ρ, 2) давления p, 3) потенциала скоростей φ и 4) скорости v в случаях, когда концы трубки

а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками,

б) открыты.

II-11. К струне, концы которой закреплены неподвижно, начиная с момента $t = 0$, приложена непрерывно распределенная поперечная сила с линейной плотностью $F(x,t)$. Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений $u(x,t)$ точек струны при $t > 0$.

II-13. Начиная с момента $t = 0$ один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $\Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в равновесном (неотклоненном) положении. Поставить краевую задачу для малых продольных отклонений $u(x,t)$ точек стержня при $t > 0$.

II-15. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены неподвижно.

III-1. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией расстояния от одного из его торцов; рассмотреть случаи, когда

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре,

б) на концы стержня подается извне заданный тепловой поток,

в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

III-6. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \leq x \leq l$; рассмотреть случаи, когда

а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю,

б) граничные плоскости непроницаемы,

в) граничные плоскости полунепроницаемы, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

IV-3. Показать, исходя из уравнений Максвелла, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с правой частью, пропорциональной объемной плотности зарядов $\rho(x,y,z)$. Дать физическую интерпретацию краевых условий первого и второго типа.

Метод характеристик.

II-52. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, имеющим вид равнобедренного треугольника высоты h с основанием $2c$. Построить (начертить) положение струны для моментов времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; a - константа в уравнении $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

II-53. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, имеющем форму квадратичной параболы, симметричной относительно некоторой точки струны ($x = 0$) на отрезке $-c \le x \le c$. Максимальное отклонение в точке $x = 0$ есть h. Найти:

а) формулы, представляющие профиль струны при $t > 0$,

б) формулы, представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами при $t > 0$.

II-54. В момент времени $t = 0$ неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющем вид двух равнобедренных треугольников: один треугольник – на отрезке $\alpha_1 \le x \le \beta_1$ высоты h_1 (центр основания $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$), другой треугольник – на отрезке $\alpha_2 \le x \le \beta_2$ высоты h_2 (центр основания $\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}$). В какой точке x и в какой момент времени $t > 0$ отклонение будет максимальным и чему оно равно ?

II-55. Неограниченной струне сообщена на отрезке $-c \le x \le c$ поперечная начальная скорость $v_0 = const$; вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Построить (начертить) положения струны для моментов времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, где $k = 0, 2, 4, 6$.

II-59. Полуограниченная струна $x \ge 0$, закрепленная в конце, возбуждена на отрезке $c \le x \le 3c$ начальным отклонением, имеющим вид равнобедренного треугольника высоты h. Начертить положения струны для моментов времени $t_k = \frac{kc}{2a}$, где $k = 2, 3, 4, 7$.

II-61. Полуограниченная струна $x \ge 0$ с закрепленным концом $x = 0$, получает в момент времени $t = 0$ поперечный удар, передающий струне импульс I на участке $0 \le x \le 2l$, причем профиль распределения скорости, получаемый при ударе, имеет в момент $t = 0$ форму полуволны синусоиды с основанием $0 \le x \le 2l$. Найти формулы, представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами x при $t > 0$.

N 35 (Смирнов). Найти решение уравнения $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = 3x^2$, $u_y(x, 0) = 0$.

Метод разделения переменных - одномерные задачи.

II-83. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко; начальное отклонение задано равенством $u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}$ ($A = const$) при $0 \le x \le l$, начальные скорости равны нулю. Найти отклонения точек струны $u(x, t)$ при $t > 0$.

II-85. Решить задачу о продольных колебаниях стержня, один конец которого ($x = 0$) закреплен жестко, а другой ($x = l$) закреплен упруго, если стержень был подвергнут начальному растяжению $u(x, 0) = Ax$ ($A = const$), $0 \le x \le l$, а начальные скорости равны нулю.

II-98. Струна $0 \le x \le l$ с жестко закрепленными концами до момента $t = 0$ находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы $F_0 = const$, приложенной к точке x_0 струны перпендикулярно невозмущенному положению струны. В начальный момент времени $t = 0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Найти колебания струны при $t > 0$.

II-99. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

II-104. Стержень с жестко закрепленным концом $x = 0$ находится в состоянии равновесия под действием продольной силы $F_0 = const$, приложенной к концу $x = l$. В момент $t = 0$ действие силы мгновенно прекращается. Найти колебания стержня, если начальные скорости равны нулю.

II-127. Упругий стержень $0 \le x \le l$ расположен вертикально и верхним концом ($x = 0$) жестко прикреплен к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти продольные колебания стержня, если его нижний конец ($x = l$) свободен.

II-128. Найти колебания стержня длины l, если один его конец закреплен жестко, а к другому с момента $t = 0$ приложена продольная сила $F_0 = const$.

II-134. К струне с жестко закрепленными концами $0 \le x \le l$ с момента $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $\Phi(x, t) = \Phi_0 \sin \omega t$ ($\Phi_0 = const$). Найти колебания струны при нулевых начальных условиях; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

II-135. Найти продольные колебания стержня $0 \le x \le l$ конец $x = 0$ которого закреплен жестко, а конец $x = l$, начиная с момента $t = 0$, движется по закону $u(l, t) = A \sin \omega t$. Начальные условия нулевые. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

II-136. Найти продольные колебания стержня $0 \le x \le l$ конец $x = 0$ которого закреплен жестко, а к концу $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложена сила $F(t) = A \sin \omega t$. Начальные условия нулевые. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

II-141. К струне $0 \le x \le l$ с жестко закрепленными концами с момента времени $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $\Phi_0 \sin \omega t$. Найти колебания струны при нулевых начальных условиях, предполагая, что среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости. Найти установившиеся колебания, представляющие собой главную часть решения при $t \to +\infty$.

II-146. Найти колебания струны $0 \le x \le l$ с жестко закрепленными концами под действием силы, приложенной с момента $t = 0$ и имеющей плотность $F(x, t) = Axt$ ($A = const$).

II-147. Найти продольные колебания стержня $0 \le x \le l$, левый конец которого закреплен жестко, а к правому с момента $t = 0$ приложена сила $F(t) = At$ $(A = const)$.
N 89 (Смирнов). Решить уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} \frac{x}{l}$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при нулевых начальных и краевых условиях первого типа.
N 90 (Смирнов). Решить уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + bx(x-l)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при нулевых начальных и краевых условиях первого типа.
N 91 (Смирнов). Решить уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + bx(x-l)t^2$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при нулевых начальных и краевых условиях первого типа .
N 92 (Смирнов). Решить уравнение $u_{xx} = a^2 u_{tt} + 2hu_t + b^2 u$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при нулевых начальных условиях и краевых условиях $u(0,t) = A$, $u(l,t) = 0$.
III-22. Найти распределение температуры в стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура задана функцией имеющей вид параболы, симметричной относительно середины стержня.
III-23. Начальная температура стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью равна u_0, а на его концах поддерживается температура u_1 и u_2 (u_0, u_1, u_2 - константы). Найти температуру сечений стержня $u(x,t)$ при $t > 0$.
III-25. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$, если его боковая поверхность и торцы теплоизолированы, а начальная температура задается функцией $\varphi(x) = A \sin \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{5\pi x}{l}$.
III-25a. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$, если его боковая поверхность и торцы теплоизолированы, а начальная температура задана функцией имеющей вид равнобедренного треугольника с основанием l и высотой u_0.
III-27. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец $(x = 0)$ поддерживается при нулевой температуре, а конец $x = l$ теплоизолирован. Начальная температура стержня равна $u_0 = const$.
III-27a. Найти температуру стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец $(x = 0)$ поддерживается при нулевой температуре, а на конец $x = l$ с момента $t = 0$ подается тепловой поток $q = const$. Начальная температура стержня равна $u_0 = const$.
III-28. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированным концом $x = 0$, если через конец $x = l$ подается извне постоянный тепловой поток q, а начальная температура стержня равна нулю.
III-33. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его конце $x = 0$ поддерживается нулевая температура, а на конце $x = l$ температура меняется по закону $u(l,t) = At$ $(A = const)$. Начальная температура стержня равна нулю.
III-34. Найти температуру стержня $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых равна $At \sin \frac{\pi x}{l}$ $(A = const)$, начальная температура стержня $u(x,0) = Ax(l-x)$, а температура концов поддерживается равной нулю.
N 121 (Смирнов). Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого равна $A\frac{x}{l}$. На конце $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = l$ температура меняется по закону $u(l,t) = Ae^{-\alpha t}$ $(\alpha > 0$, $A = const)$. Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$. Рассмотреть, в частности, случай резонанса.
II-206. Решить уравнение $u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-\alpha t} \cos \frac{\pi x}{2l}$ $(\alpha > 0$, $A = const)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при краевых условиях $u_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ и нулевом начальном условии.
II-207. Решить уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ при нулевых краевых условиях первого типа и начальных условиях $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = A \sin \frac{\pi x}{2l} + B \sin \frac{3\pi x}{2l}$ $(A = const$, $B = const)$.
II-208. Решить уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-\alpha t} \sin \frac{\pi x}{l}$ $(\alpha > 0$, $A = const)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$, при нулевых начальных и краевых условиях первого типа.
II-209. Решить уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 \le x \le l$, $t > 0$ с начальным и краевыми условиями $u(x,0) = Ax$, $u_x(0,t) = q_1$, $u_x(l,t) = q_2$ $(q_1, q_2, A = const)$. Определить $u(x,t)$ при $t \to +\infty$ с точностью до экспоненциально малых слагаемых.

Метод разделения переменных - задачи с прямоугольной симметрией.

V-10. Найти температуру куба с ребром l, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре, а в начальный момент времени куб равномерно нагрет.
VI-47. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$ с закрепленным краем, вызванные начальным отклонением $u(x,y,0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y)$. Начальные скорости равны нулю.
VI-48. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$ с закрепленным краем, вызванные начальным распределением скоростей $u_t(x,y,0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y)$. Начальные отклонения равны нулю.

Метод разделения переменных - задачи со сферической симметрией (без применения специальных функций).

V-15. Найти температуру шара радиуса r_0, поверхность которого поддерживается при температуре, равной нулю. В начальный момент времени температура шара была равна $u|_{t=0} = u_0(1 - \frac{r^2}{r_0^2})$, $0 \le r \le r_0$.
V-16. Начальная температура шара $0 \le r \le r_0$ равна $u|_{t=0} = u_0 = const$, а на поверхности шара поддерживается температура $u_1 = const$. Найти температуру шара при $t > 0$.
V-17. Начальная температура шара $0 \le r \le r_0$ равна $u|_{t=0} = u_0 = const$, а внутрь шара через его поверхность подается

постоянный поток плотности q. Найти температуру шара при $t > 0$.
V-20. Начальная температура шара $0 \le r \le r_0$ равна $u|_{t=0} = u_0 = const$, а на его поверхности происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_0 + \alpha t$ ($u_0 = const$, $\alpha = const$). Найти температуру шара при $t > 0$.

Метод разделения переменных - задачи с цилиндрической симметрией

V-27. Решить задачу о нагревании бесконечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре $u_0 = const$.
V-28. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$.
V-28a. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, если его боковая поверхность теплоизолирована, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0\frac{r^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right)$.
V-29. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, если начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0 = const$, а на его поверхность с момента $t = 0$ извне подается тепловой поток плотности $q = const$.
V-31. Начальная температура неограниченного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$ равна $u|_{t=0} = u_0 = const$, а на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $u_1 = const$. Найти температуру цилиндра при $t > 0$.
V-33. Вне бесконечного круглого проводящего цилиндра $0 \le r \le r_0$ в момент $t = 0$ мгновенно установилось постоянное магнитное поле H_0, параллельное оси цилиндра. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра для $t > 0$ при нулевых начальных условиях; найти затем поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра.
V-35. Начальная температура бесконечной круглой цилиндрической трубы $r_1 \le r \le r_2$ равна $u|_{t=0} = u_0 = const$. Найти температуру трубы при $t > 0$, если на ее внутренней поверхности поддерживается температура $u_1 = const$, а на наружной поверхности – температура $u_2 = const$.
V-39. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, если на его поверхности поддерживается нулевая температура, а начальная температура равна
а) $u|_{t=0} = u_0\frac{r}{r_0}\cos\varphi$ ($u_0 = const$), б) $u|_{t=0} = u_0\frac{r^2}{r_0^2}\cos^2\varphi$ ($u_0 = const$).
V-47. Найти температуру конечного круглого цилиндра $0 \le r \le r_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le l$, поверхность которого поддерживается при нулевой температуре, если начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0\frac{z}{l}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\frac{r^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\cos 2\varphi$.
VI-60. Найти поперечные колебания круглой мембраны $0 \le r \le r_0$ с закрепленным краем, вызванные радиально симметричным начальным отклонением, имеющим форму параболоида вращения. Начальные скорости равны нулю.
VI-62. Найти колебания круглой мембраны $0 \le r \le r_0$ с закрепленным краем, вызванные равномерно распределенным постоянным давлением, действующим на одну сторону мембраны с момента $t = 0$.

Метод разделения переменных - задачи со сферической симметрией (с применением специальных функций).

V-49. Решить задачу об остывании шара радиуса r_0, на поверхности которого поддерживается температура, равная нулю. Начальная температура шара равна $u|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi)$, $0 \le r < r_0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;
а) $f(r, \theta, \varphi) = u_0\frac{x}{r_0} = u_0\frac{r}{r_0}\sin\theta\cos\varphi$ ($u_0 = const$), б) $f(r, \theta, \varphi) = u_0\frac{xy}{r_0^2} = u_0\frac{r^2}{2r_0^2}\sin^2\theta\sin 2\varphi$ ($u_0 = const$).
VI-93. Сферический сосуд с газом в течение длительного времени двигался равномерно со скоростью $v_0 = const$, а затем в момент $t = 0$ мгновенно остановился и остался неподвижным. Найти возникшие вследствие этого колебания газа в сосуде (потенциал скоростей).
IV-126. Найти потенциал и напряженность электростатического поля внутри и вне сферы, верхняя половина которой заряжена до потенциала V_1, а нижняя – до потенциала V_2.

Метод разделения переменных для уравнения Лапласа.

IV-85. Найти электростатическое поле внутри бесконечного цилиндра, перпендикулярное сечение которого имеет форму полукруга; поверхность цилиндра, соответствующая диаметру полукруга, заряжена до потенциала V_1, а остальная поверхность – до потенциала V_2.
IV-95. Найти электростатическое поле внутри области, ограниченной проводящими пластинами $y = 0$, $y = b$ и $x = 0$, если пластина $x = 0$ заряжена до потенциала V, а пластины $y = 0$, $y = b$ заземлены.
IV-97. Решить уравнение $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ при следующих краевых условиях: $u(0, y) = V$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = V_0$.
IV-110. Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри цилиндрической коробки кругового сечения $0 \le r \le r_0$, $0 \le z \le l$, оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала V_0. Определить напряженность поля на оси. Рассмотреть предельный случай $l \to +\infty$.
IV-113. Определить стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного цилиндра, если к нижнему основанию $z = 0$ подводится тепловой поток $q = const$, боковая поверхность $r = r_0$ и верхнее основание $z = l$ поддерживаются при температуре, равной нулю.
N 149 (Смирнов). Найти гармоническую функцию внутри шара радиуса r_0 с центром в начале координат и принимающую заданные значения $A\cos^2\theta$ на поверхности шара.