

Программа курса ММФ (5 семестр, 2013)

1. Уравнения в частных производных второго порядка. Классификация уравнений в частных производных второго порядка линейных относительно старших производных. Уравнение характеристик. Характеристические поверхности (линии).
2. Приведение к каноническому виду эллиптических, параболических и гиперболических уравнений для случая двух независимых переменных. Дальнейшее упрощение для линейных уравнений.
3. Постановки простейших задач математической физики, приводящих к уравнениям параболического, эллиптического и гиперболического типов. Типы краевых условий (1, 2 и 3-я краевые задачи).
4. Одномерное волновое уравнение для всего пространства (бесконечная струна). Формула Даламбера. Интерпретация решения. Роль характеристик.
5. Общая схема решения неоднородного уравнения гиперболического типа. Пример - неоднородное одномерное волновое уравнение для всего пространства (бесконечная струна, вынужденные колебания).
6. Корректность постановки задач математической физики (существование, единственность, устойчивость). Пример - одномерное волновое уравнение для всего пространства.
7. Первая и вторая краевые задачи для одномерного однородного волнового уравнения для полупространства (полубесконечная струна, метод продолжения).
8. Решение одномерного волнового уравнения для конечной струны методом разделения переменных для первой однородной краевой задачи. Интерпретация решения. Энергия струны.
9. Неоднородное одномерное волновое уравнение для конечной струны для случая первой однородной краевой задачи. Функция Грина первой краевой задачи, ее физический смысл, свойства.
10. Учет неоднородности в 1, 2 и 3-ей краевой задаче. Стационарная неоднородность в одномерном волновом уравнении и в граничных условиях для конечной струны.
11. Решение методом разделения переменных первой краевой задачи об остывании прямоугольного параллелепипеда.
12. Уравнение для цилиндрических функций. Функции Бесселя произвольного порядка. Их свойства. Рекуррентные формулы. Функции Бесселя полуцелого порядка. Асимптотические разложения для функций Бесселя. Производящая функция функций Бесселя целого порядка. Интегральное представление.
13. Функции Неймана. Их свойства. Функции Ханкеля 1 и 2 рода. Асимптотическое поведение.
14. Цилиндрические функции мнимого аргумента: модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда. Асимптотическое поведение.
15. Решение методом разделения переменных 1-ой краевой задачи о распространении тепла в бесконечном цилиндре. Условие ортогональности и квадрат нормы.
16. Уравнение Лапласа и полиномы Лежандра. Производящая функция для полиномов Лежандра. Уравнение для полиномов Лежандра. Формула Родрига. Свойства полиномов

Лежандра. Рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра. Условие ортогональности и квадрат нормы для полиномов Лежандра. Условие полноты.

17. Присоединенные полиномы Лежандра. Ортогональность и квадрат нормы.
18. Сферические функции. Ортогональность и квадрат нормы.
19. Шаровые функции. Решение методом разделения переменных внутренней и внешней задачи Дирихле для шара.
20. Решение задачи Дирихле для круга. Формула Пуассона. Комплексная запись формулы Пуассона; связь с аналитическими функциями. Формула Шварца.
21. Вывод формулы Пуассона для задачи Дирихле для полуплоскости.
22. Общая схема применения метода конформных преобразований к решению задачи Дирихле для односвязной области на плоскости.
23. Некоторые важнейшие свойства гармонических функций в трехмерном пространстве: интегральное представление, теорема о среднем.