МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Задачи для практических занятий (4 семестр)

Сборник задач по теории аналитических функций под редакцией М.А.Евграфова. М. Наука, 1972. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.Л. Краснов. М. Наука, 1981.

1 Комплексные числа и действия над ними.

1.04. Найти действительную $\operatorname{Re} z$ и мнимую $\operatorname{Im} z$ части следующих комплексных чисел:

$$\mathbf{1}.\ z=\frac{1}{1-i}.\quad \mathbf{2}.\ z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.\quad \mathbf{3}.\ z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.\quad \mathbf{4}.\ z=\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2.$$

$$5.\ z=\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.\quad \mathbf{6}.\ z=\sqrt{3+4i}.\quad 7.\ z=\sqrt{2-2i}.$$

1.05. Доказать, что

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad z_2\neq 0.$$

1.06. Найти модули $|z|$ и аргументы $\operatorname{Arg} z$ следующих комплексных чисел (записать в показательной форме):

$$\mathbf{1}.\ z=i.\quad \mathbf{2}.\ z=-3.\quad \mathbf{3}.\ z=1+i^{123}.\quad \mathbf{6}.\ z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

$$8.\ z=(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}.\quad \mathbf{9}.\ z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

1.07. Доказать равенства:

$$4.\ \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar z}{2i}.\qquad 10.\ \overline{z^n}=(\bar z)^n,\quad n=1,2,3\ldots$$

1.13. Дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравентсвам:

$$\mathbf{1}.\ \operatorname{Re} z>0.\quad \mathbf{2}.\ \operatorname{Im} z<1.\quad \mathbf{3}.\ |\operatorname{Re} z|<1.\quad \mathbf{4}.\ |\operatorname{Im} z|<1,\ \ 0<\operatorname{Re} z<1.\quad \mathbf{5}.\ |z|<1.\quad \mathbf{6}.\ |z-i|>1.$$

$$8.\ 1<|z-1|<3.\quad 9.\ 0<\arg z<\frac{\pi}{4}.\quad \mathbf{10}.\ |\pi-\arg z|<\frac{\pi}{4}.\quad \mathbf{11}.\ 0<\operatorname{Re}(iz)<1.$$

1.21.Выяснить, какие множества точек z комплексной плоскости удовлетворяют неравенствам:

$$\mathbf{1}.\ |z-i|+|z+i|<4.\quad 2.\ \operatorname{Re}\frac{1}{z}<\frac{1}{2}.\quad \mathbf{4}.\ |z+1|<|z-1|.\quad 7.\ \frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}.\quad 8.\ |z|>1-\operatorname{Re} z.$$

1.30. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда величина $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ действительна.

1.49. Опираясь на формулу $\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}$, доказать формулу:

$$\cos n\varphi=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi.$$

1.57. Пусть $\operatorname{Re} a=\alpha$, $\operatorname{Im} a=\beta$. Доказать, что при $\beta>0$ все решения уравнения $z^2=a$ даются формулой

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right),$$

а при $\beta < 0$ – формулой

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right).$$

2 Условия Коши-Римана. Гармонические функции.

8.01. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции $f(z)$ $(z = x+iy)$:

3. $f(z) = |z|^2$. **4**. $f(z) = x^2 + iy^2$. 5. $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$. 6. $f(z) = 2xy - i(x^2-y^2)$. **7**. $f(z) = \bar{z}$.

8.01a. Найти действительные постоянные a, b, c, при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

1. $f(z) = x + ay + i\,(bx+cy)$. 2. $f(z) = \cos x\,(\mathrm{ch}\,y + a\,\mathrm{sh}\,y) + i\sin x\,(\mathrm{ch}\,y + b\,\mathrm{sh}\,y)$. $(z = x+iy)$

8.02. Доказать, что из дифференцируемости в точке z_0 функций $f(z)$ и $g(z)$ следует дифференцируемость в этой точке функций $\mathbf{F_1(z) = f(z) + g(z)}$, $F_2(z) = f(z)g(z)$, и $\mathbf{F_1'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)}$, $F_2'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

8.06. Определим функцию e^z при любом комплексном значении z равенством $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Доказать, что при любом комплексном значении постоянной a справедливо равенство $(e^{az})' = ae^{az}$.

8.07. Определим функции $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$, $\sin z$, $\cos z$ равенствами

$$\mathrm{sh}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Доказать, что:

1. $(\mathrm{sh}\,z)' = \mathrm{ch}\,z$. 2. $(\mathrm{ch}\,z)' = \mathrm{sh}\,z$. 3. $(\sin z)' = \cos z$. 4. $(\cos z)' = -\sin z$.

8.08. Найти, где дифференцируемы следующие функции $f(z)$, и написать формулы для их производных:

2. $f(z) = \sin(2e^z)$. **4**. $f(z) = ze^{-z}$. **5**. $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$. 6. $f(z) = \dfrac{z\cos z}{1+z^2}$.

8.23. Пусть u, v – пара сопряженных гармонических функций в области D. Доказать, что U, V также образуют пару сопряженных гармонических функций в области D:

1. $U = au - bv$, $V = bu + av$. **4**. $U = e^u\cos v$, $V = e^u\sin v$. 5. $U = e^{u^2-v^2}\cos 2uv$, $V = e^{u^2-v^2}\sin 2uv$.

8.30. В следующих задачах дается одна из пары сопряженных гармонических функций u или v (во всей плоскости). Найти вторую функцию пары.

1. $u = xy$. **2**. $u = x^2 - y^2 + xy$. 3. $v = y\ \cos y\ \mathrm{sh}\,x + x\ \sin y\ \mathrm{ch}\,x$.

4. $u = r\ \varphi\cos\varphi + r\ \ln r\sin\varphi \qquad (z = x+iy = re^{i\varphi})$.

8.31. Найти все гармонические функции вида:

1. $u = \varphi(x^2+y^2)$. 2. $u = \varphi(x^2-y^2)$.

8.32. Найти гармоническую функцию, сохраняющую постоянное значение на каждой кривой следующего семейства кривых $y = Cx$.

8.51. Восстановить регулярную функцию $f(z)$, выразив её через z $(z = x+iy)$, по заданной функции:

1. $\mathrm{Re}\,f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $\qquad f(0) = 0$. 2. $\mathrm{Re}\,f = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $\qquad f(0) = 0$.

5. $|f| = (x^2+y^2)e^x$. **6**. $\arg f = xy$. 8. $\arg f = \varphi + r\sin\varphi \quad (z = re^{i\varphi})$.

3 Геометрический смысл производной.

9.06. Пусть кривая C – это луч $\arg(z - z_0) = \varphi$, выходящий из точки z_0. Найти коэффициент линейного растяжения $R(\varphi)$ в точке z_0 и угол поворота $\alpha(\varphi)$ в точке z_0 для этого луча при следующих отображениях:

$$\mathbf{1}.\ \ w = z^2, \quad z_0 = 1. \qquad 2.\ \ w = \bar{z}^2, \quad z_0 = i.$$

$$\mathbf{4}.\ \ w = 2z + i\bar{z}, \quad z_0 = 0. \qquad 5.\ \ w = \frac{z - z_0}{z + z_0} \quad (z_0 \neq 0).$$

9.09. Найти множества всех тех точек z_0, в которых коэффициент линейного растяжения при следующих отображениях равен единице:

$$\mathbf{1}.\ \ w = z^2. \quad 3.\ \ w = z^2 - 2z. \quad \mathbf{5}.\ \ w = \frac{1+iz}{1-iz}. \quad 6.\ \ w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0.$$

9.10. Найти множества всех тех точек z_0, в которых угол поворота при следующих отображениях равен нулю:

$$1.\ \ w = iz^2. \quad 4.\ \ w = \frac{i}{z}.$$

9.14. Пусть функция $w(z)$ регулярна в замыкании $\bar{D}$ области D, а D' – образ области D при отображении $w = w(z)$. Доказать,что если отображение $w = w(z)$ взаимно однозначно в D, то якобиан отображения равен $|w'(z)|^2$, а для площади $\sigma(D')$ области D' справедлива формула $\sigma(D') = \iint\limits_D |w'(z)|^2 \, dx\, dy$.

9.15. Пусть функция $w(z)$ регулярна в области D, а C – произвольная спрямляемая кривая, лежащая в D. Доказать, что для длины $l(C')$ образа C' кривой C при отображении $w = w(z)$ справедлива формула $l(C') = \int\limits_C |w'(z)|\,|dz|$.

9.16. Найти длины образов следующих кривых C при указанных отображениях:

$$\mathbf{1}.\ \ C: z = it + 1, \ \ 0 \le t \le 1; \ \ w = z^2. \qquad 3.\ \ C: z = it, \ \ 0 \le t \le 6\pi; \ \ w = e^z.$$

$$\mathbf{4}.\ \ C: z = (1+i)t, \ 0 \le t \le 2\pi; \ \ w = e^z. \qquad 6.\ \ C: z = e^{it}, \ \ 0 \le t \le 2\pi; \ \ w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

9.17. Найти площади образов областей D при указанных отображениях:

$$\mathbf{1}.\ \ D: \left\{2 < |z| < 3, \ \ |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right\}; \quad w = z^2. \qquad 2.\ \ D: \{0 < \operatorname{Re} z < 1, \ \ |\operatorname{Im} z| < \pi\}; \quad w = e^z.$$

3. D: квадрат с вершинами в точках $0, 1, i+1, i$; $w = \frac{z-1}{z+1}$.

4 Конформные отображения. Дробно-линейная функция.

32.01. Выяснить, однолистны ли функции $f(z)$ в указываемых областях D:

$$1.\ \ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad D: \{|z| < \infty\}, \quad ad - bc \neq 0. \qquad \mathbf{2}.\ \ f(z) = z^2 \quad D: \left\{1 < |z| < 2, \ \ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

$$\mathbf{3}.\ \ f(z) = z + \frac{1}{z} \quad D: \{|z| < 1\}. \quad \mathbf{4}.\ \ f(z) = e^z \quad D: \{|z| < 4\}. \quad 7.\ \ f(z) = z + \frac{1}{z} \quad D: \left\{|z - i| < \sqrt{2}\right\}.$$

$$5.\ \ f(z) = z^2 \quad D: \left\{3 < |z+2| < 4, \ \ 0 < \arg(z+2) < \frac{3\pi}{2}\right\}. \qquad 6.\ \ f(z) = e^z \quad D: \left\{\Big|\operatorname{Re}\left[(1+i)z\right]\Big| < \pi\right\}.$$

35.03. Найти образ круга $|z - 1| < 2$ при следующих отображениях:

$$\mathbf{1}.\ \ w = 1 - 2iz. \quad 2.\ \ w = \frac{2iz}{z+3}. \quad \underline{3.}\ \ w = \frac{z+1}{z-2}. \quad 4.\ \ w = \frac{z-1}{2z-6}.$$

35.04. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$ при следующих отображениях:

$$1.\ w = (1+i)z + 1. \quad \mathbf{2}.\ w = \frac{z}{z-1+i}. \quad \mathbf{3}.\ w = \frac{z}{z-2}. \quad \underline{4.}\ w = \frac{4z}{z+1}. \quad 5.\ w = \frac{z-3+i}{z+1+i}.$$

35.05. Найти образы указанных областей D при указанных отображениях:

$$\mathbf{1}.\ D: \{|z| < 1,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \frac{1-z}{1+z}. \qquad \underline{2.}\ D: \{z \notin [-2,1]\}, \quad w = \frac{z+2}{1-z}.$$

$$\mathbf{3}.\ D: \{|z-i| > 1,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \frac{1}{z}. \qquad 4.\ D: \{1 < |z| < 2\}, \quad w = \frac{2}{z-1}.$$

35.13. Найти образы указанных областей D при указанных отображениях:

$$3.\ D: \{|z| < 1,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = z^{\frac{3}{2}}, \quad w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1-i}{4}. \qquad 5.\ D: \left\{|\arg z| < \frac{\pi}{8},\ \ z \notin [0,1]\right\}, \quad w = z^8.$$

35.14. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. **37**, 38, **39**, 43, **44**, 46, 51 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

5 Конформные отображения. Функция Жуковского.

35.19. Найти образы следующих областей при отображении функцией $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

$$\mathbf{1}.\ |z| > 2. \quad 2.\ |z| < \frac{1}{2}. \quad \mathbf{3}.\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \quad 4.\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ \ z \notin [0,i]. \quad 5.\ |z| < 1,\ \ z \notin [0,1].$$

35.20. Найти образы следующих областей при отображении функцией $w = z + \sqrt{z^2-1}$ $(z = x+iy)$:

$$\mathbf{1}.\ D: \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} > 1\right\}, \ \ (a > 1), \ \ w(\infty) = 0. \qquad 2.\ D: \left\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} < 1\right\}, \ \ (0 < a < 1), \ \ w(0) = i.$$

$$3.\ D: \{z \notin [-\infty,-1],\ \ z \notin [1,+\infty]\}, \ \ w(0) = i. \qquad 4.\ D: \{z \notin [-1,1]\}, \ \ w(\infty) = \infty.$$

$$5.\ D: \{\operatorname{Im} z > 0\}, \ \ w(+i\infty) = 0.$$

35.21. Доказать, что образом области $|z - ih| > \sqrt{1+h^2}$ при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ является вся плоскость w с разрезом по дуге окружности, имеющей концы в точках $w = \pm 1$ и проходящей через точку $w = ih$.

35.22. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 55, **56**, **59**, 63,64, 67 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

35.23. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. 72, на круг $|w| < 1$.

6 Конформные отображения. Функции exp(z) и ln(z).

35.28. Найти образы следующих областей D при отображениях, указываемыми функциями:

$$\mathbf{1}.\ D: \{-\pi < \operatorname{Im} z < 0\}, \ \ w = e^z. \qquad 2.\ D: \{|\operatorname{Im} z| < \pi\}, \ \ w = e^z.$$

$$3.\ D: \left\{|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\}, \ \ w = e^z. \qquad 4.\ D: \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \ \operatorname{Re} z > 0\}, \ \ w = e^z.$$

$$\mathbf{5}.\ D: \left\{0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2},\ \ \operatorname{Re} z > 0\right\}, \ \ w = e^{2z}. \qquad 6.\ D: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \ \operatorname{Im} z > 0\}, \ \ w = e^{iz}.$$

$$7.\ D: \{z \notin [0,+\infty]\}, \ \ w = \ln z, \ \ w(-1) = -i\pi. \qquad \mathbf{8}.\ D: \{\operatorname{Im} z > 0\}, \ \ w = \ln z, \ \ w(i) = \frac{i\pi}{2}.$$

35.29. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображенных на рис. **76**, **79**, 80, **82**, 84, 86, 88 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

35.30. Найти какие-либо функции $w(z)$, конформно отображающие области, изображенные на рис. 93, **96**, 97 на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$.

7 Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Ряд Тейлора.

10.23. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

$$\mathbf{1}.\ \int\limits_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}. \quad 8.\ \int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} \quad (|a| < r < |b|, \quad n = 1, 2, \ldots).$$

$$\mathbf{7}.\ \int\limits_{\partial D} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3} \quad \left(D: \ \text{а)}\ \ |z| < \frac{1}{2}; \ \ \text{б)}\ \ |z| < \frac{3}{2}; \ \ \text{в)}\ \ |z-1| < \frac{1}{2}\right).$$

10.23а. С помощью интегральной формулы Грина вычислить следующие интегралы по замкнутому контуру, ограничивающему односвязную область, площадь которой равна S:

$$\mathbf{1}.\ \int\limits_{\partial S} \operatorname{Re} z\,dz. \qquad 2.\ \int\limits_{\partial S} \operatorname{Im} z\,dz. \qquad 3.\ \int\limits_{\partial S} \bar{z}\,dz.$$

6.20. Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$3.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0. \qquad \mathbf{4}.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n. \qquad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n.$$

6.21. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равен R. Найти радиус сходимости следующих степенных рядов:

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^m z^n \quad (m = 1, 2 \ldots). \qquad \mathbf{2}.\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{mn} \quad (m = 1, 2 \ldots).$$

11.01. Непосредственным вычислением $f^{(n)}(0)$ доказать следующие формулы, справедливые для всех z:

$$2.\ \ e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{az_0} \frac{a^n}{n!} (z - z_0)^n.$$

11.04. Найти разложение следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

$$\mathbf{1}.\ \frac{1}{(1+z)^2}. \quad 2.\ \frac{1}{(1-z^2)^2}. \quad \mathbf{3}.\ \frac{1}{(1+z^3)^2}. \quad 4.\ \frac{1}{(1-z^6)^3}.$$

11.05. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующие рациональные функции (найти радиус сходимости ряда):

$$2.\ \frac{2z-5}{z^2-5z+6}. \quad \mathbf{3}.\ \frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}.$$

11.06. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующие функции: **1**. $\dfrac{1}{1+z+z^2}$.

11.10. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ следующих функций: 3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^3}}$.

8 Ряд Лорана. Особые точки.

19.01. Доказать, что точка $z = a$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

$$\textbf{1}.\ \frac{z^2-1}{z-1}\quad (a=1).\quad \textbf{2}.\ \frac{\sin z}{z}\quad (a=0).\quad 3.\ \frac{z}{\operatorname{tg} z}\quad (a=0).$$

$$5.\ \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\quad (a=0).\quad \textbf{6}.\ \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}\quad (a=0).\quad \textbf{8}.\ \frac{z^2-1}{z^3+1}\quad (a=\infty).$$

19.02. Доказать, что точка $z = a$ является полюсом следующих функций (определить порядок полюса):

$$\textbf{1}.\ \frac{1}{z}\quad (a=0).\quad \textbf{2}.\ \frac{1}{(z^2+1)^2}\quad (a=i).\quad \textbf{3}.\ \frac{z^2+1}{z+1}\quad (a=\infty).\quad 4.\ \frac{z}{1-\cos z}\quad (a=0).$$

$$\textbf{5}.\ \frac{z}{(e^z-1)^2}\quad (a=0).\quad 6.\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}\quad (a=\infty).\quad 7.\ \frac{z}{e^z+1}\quad (a=\pi i).$$

19.07. Доказать, что точка $z = a$ является существенно особой точкой функций:

$$\textbf{1}.\ e^z\quad (a=\infty).\quad 2.\ e^{-z^2}\quad (a=\infty).\quad \textbf{3}.\ \sin\frac{\pi}{z^2}\quad (a=0).\quad 4.\ z^2\cos\frac{\pi}{z}\quad (a=0).$$

$$6.\ \sin(e^z)\quad (a=\infty).\quad \textbf{7}.\ \cos\frac{z}{z+1}\quad (a=-1).\quad 8.\ \sin\frac{\pi}{z^2+1}\quad (a=-i).$$

19.08. Найти все изолированные особые точки однозначного характера для следующих функций и определить их вид:

$$\textbf{1}.\ \frac{z}{\sin z}.\quad \textbf{5}.\ \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

20.01. Найти множества точек z, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

$$1.\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n.\quad \textbf{2}.\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}.\quad 8.\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n.$$

20.06. Опираясь на формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать справедливость следующих формул:

$$5.\ \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}};\quad a \neq b,\quad |z-a| > |b-a|.$$

20.08. Разложить функции в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$:

$$\textbf{1}.\ \frac{1}{(z+1)(z-2)}.\quad 3.\ \frac{z}{(z^2+1)(z+2)}.$$

20.09. Следующие функции разложить в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D (точка a и кольцо D указаны в скобках):

$$\textbf{1}.\ \frac{1}{z(z-3)^2}\quad (a=1,\quad D: 1<|z-1|<2).\quad 2.\ \frac{1}{(z^2-9)z^2}\quad (a=1,\quad D: 1<|z-1|<2).$$

$$5.\ \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\quad \left(a=0,\quad -\frac{3}{2} \in D\right).\quad 8.\ \frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}\quad (a=0,\quad D: |z|>2).$$

9 Вычеты функций комплексного переменного.

21.02. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

$$\mathbf{1}.\ \frac{1}{z+z^3}.\quad \mathbf{2}.\ \frac{z^2}{1+z^4}.\quad \mathbf{3}.\ \frac{z^2}{(1+z)^3}.\quad 4.\ \frac{1}{(z^2+1)^3}.\quad 5.\ \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}.$$

$$\mathbf{7}.\ \frac{1}{\sin\pi z}.\quad 8.\ \operatorname{ctg}\pi z.\quad 10.\ \operatorname{cth}^2\pi z.\quad \mathbf{11}.\ \frac{\cos z}{(z-1)^2}.\quad \mathbf{12}.\ \frac{1}{e^z+1}.$$

21.03. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

$$\mathbf{1}.\ \frac{z^4+1}{z^6-1}.\quad \mathbf{2}.\ \cos\pi\frac{z+2}{2z}.\quad 3.\ \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}.\quad \mathbf{4}.\ \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}.\quad 5.\ \frac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}.\quad 6.\ z\cos^2\frac{\pi}{z}.$$

21.09. Найти вычеты следующих функций во всех их особых точках и в бесконечности:

$$\mathbf{1}.\ \frac{1}{z^6(z-2)}.\quad \mathbf{2}.\ \frac{1+z^8}{z^6(z+2)}.\quad 3.\ \frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}.\quad \mathbf{6}.\ \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}.\quad 8.\ \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}.$$

21.10. Вычислить:

$$2.\ \operatorname*{res}_{z=0}\frac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z(\sin z-z)}.\quad 4.\ \operatorname*{res}_{z=0}\frac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}.\quad 6.\ \operatorname*{res}_{z=0}\frac{z}{\operatorname{ch} z-1-\frac{z^2}{2}}.$$

21.12. Найти вычеты для каждой ветви, регулярной в некоторой окрестности точки z_0 (исключая, возможно, ее саму):

$$\mathbf{1}.\ \operatorname*{res}_{z=0}\ \frac{z+3}{4\pi i-\ln(1+z)}.\quad 2.\ \operatorname*{res}_{z=\infty}\ \ln\frac{z-1}{z+1}.\quad \mathbf{3}.\ \operatorname*{res}_{z=1}\ \frac{z}{2+\sqrt{5-z}}.$$

$$4.\ \operatorname*{res}_{z=0}\ \frac{z}{\sqrt{4-z^2}+2}.\quad \mathbf{5}.\ \operatorname*{res}_{z=\infty}\ \sqrt{(z-1)(z-2)}.\quad \mathbf{6}.\ \operatorname*{res}_{z=\infty}\ \frac{\sqrt[3]{2z^2-z^3}}{z+3}.$$

10 Вычисление интегралов по замкнутому контуру.

22.01. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int\limits_{\partial D}\frac{dz}{1+z^4}\ \ (D:|z-1|<1).\quad 2.\ \int\limits_{\partial D}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}\ \ (D:|z-1-i|<2).\quad 5.\ \int\limits_{\partial D}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}\,dz\ \ (D:|z|>4).$$

$$3.\ \int\limits_{\partial D}\frac{\sin z}{(z+1)^3}\,dz\quad \left(D:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}\right)\quad \mathbf{4}.\ \int\limits_{\partial D}\frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}\ \ (D:2<|z|<4).$$

22.02. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int\limits_{\partial D}\frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}\ \ (D:|z|<2).\quad 3.\ \int\limits_{\partial D}\frac{z^3}{z^4-1}\,dz\ \ (D:|z|<2).\quad \mathbf{6}.\ \int\limits_{\partial D}z\sin\frac{z+1}{z-1}\,dz\quad (D:|z|<2).$$

$$8.\ \int\limits_{\partial D}e^{\frac{1}{1-z}}\frac{dz}{z}\ \ (D:|z-2|+|z+2|<6).$$

22.05.Проверить, что многозначные аналитические функции, стоящие под знаком интеграла, допускают выделение в области D однозначной ветви, удовлетворяющей заданным условиям, и вычислить интеграл от этой ветви.

$$5.\ \int\limits_{\partial D}\ \frac{z+2}{z+\ln(1-z)}\,dz\quad \left(D:|z+2|<\frac{5}{2}\right),\quad (\ln(1-z)|_{z=1-e}=1).$$

28.03. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{3}.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}. \quad 8.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 4ix - 5)^2}. \quad \mathbf{9}.\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0. \quad 10.\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^6\,dx}{(x^4 + a^4)^2}, \quad a > 0.$$

11 Лемма Жордана. Интегралы с особенностью на пути интегрирования.

28.05. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2}\,dx. \quad 5.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5}\,dx. \quad \mathbf{6}.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}\,dx}{x^4 + 8x^2 + 16}. \quad 8.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2 + 2ix - 2)^2}.$$

$$9.\ \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}\,dz}{z^2 + 1}, \quad t > 0. \quad \mathbf{11}.\ \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tz}\,dz}{(z^2 - 1)^2}; \quad \text{а) } t > 0; \quad \text{б) } t < 0; \quad \text{в) } t = 0.$$

28.07. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2}\,dx. \quad 3.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x)\sin x}{x^4 + 10x^2 + 9}\,dx. \quad \mathbf{5}.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2 - 4x + 5}\,dx.$$

$$7.\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10}\,dx. \quad 12.\ \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2}\,dx, \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0.$$

28.09. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - \xi)}, \quad a > 0, -\infty < \xi < \infty. \quad \mathbf{5}.\ \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\,dx, \quad \alpha > 0.$$

$$6.\ \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx. \quad 10.\ \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 ax\,dx}{x^2(x^2 + b^2)}, \quad a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0.$$

12 Интегралы от многозначных функций.

28.15. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}. \quad 3.\ \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{13 + 12\cos\varphi}. \quad \mathbf{4}.\ \int_{0}^{\pi} \frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{1 + \sin^2\varphi}. \quad 5.\ \int_{0}^{\pi} \operatorname{ctg}(\varphi - ia)\,d\varphi, \quad a > 0.$$

$$7.\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}; \quad \text{а)} \quad a > 1; \quad \text{б)} \quad -1 < a < 1; \quad \text{в)} \quad a = 1.$$

28.22. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{2}.\ \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}}. \quad 3.\ \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)\sqrt[3]{x}}. \quad \mathbf{5}.\ \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x^2 + 1}\,dx. \quad 9.\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad 0 < \operatorname{Re} a < 3.$$

28.29. Вычислить интегралы:

$$2.\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}.\quad \mathbf{3}.\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}.\quad 12.\ \text{v.p.}\int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{x-a}\,dx,\quad a>0,\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1.$$

$$13.\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2},\quad \operatorname{Re}a>0.\quad \mathbf{15}.\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2},\quad \operatorname{Re}a>0.$$

28.25. Вычислить интегралы:

$$\mathbf{1}.\ \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx.\quad 4.\ \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\,dx.\quad 13.\ \int\limits_0^2 \sqrt[5]{x^2(2-x)^3}\,dx.$$

28.19. Вычислить интеграл:

$$\underline{1.}\ \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{e^x+1},\quad 0<\operatorname{Re}a<1.$$

29.11. Вычислить интеграл:

$$\underline{2.}\ \int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+2x+2}.$$

13 Операционное исчисление.

511. Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

$$\mathbf{a}.\ f(t)=b^t\eta(t), b>0, b\neq 1;\quad \mathbf{v}.\ f(t)=\frac{1}{t-3}\eta(t);\quad d.\ f(t)=\operatorname{ch}(3-i)t\eta(t);$$

$$e.\ f(t)=\operatorname{tg}(t)\eta(t);\quad \mathbf{g}.\ f(t)=t^t\eta(t).$$

516. Может ли функция $F(p)=\frac{1}{\cos p}$ служить изображением некоторого оригинала?
Найти изображения следующих функций:
528. $f(t)=\sin^4 t$. 529. $f(t)=\cos mt\cos nt$. 546v. $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$. **547b.** $f(t)=\frac{\cos t-\cos 2t}{t}$.
Вычислить интеграл:
552. $\int\limits_0^\infty \frac{A\exp(-\alpha t)+B\exp(-\beta t)+C\exp(-\gamma t)+D\exp(-\delta t)}{t}\,dt$, $A+B+C+D=0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\delta>0$.
Найти изображение следующих периодических функций:
581. $f(t)=|\sin t|$. 582. $f(t)=|\cos t|$.
Найти изображение следующей функции:
592. $\int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau)\,d\tau$.
597. Функции Бесселя порядка n определяются как сумма ряда

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+n}}{k!(k+n)!2^{2k+n}},\quad n=0,1,2,...,$$

показать, что
a.

$$J_0(t)\risingdotseq\frac{1}{\sqrt{p^2+1}};$$

b.

$$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})\risingdotseq\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}.$$

599. Полиномы Лагерра определяются формулой

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Показать, что

$$L_n(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$$

600. Найти изображение функции $f(t) = \ln t$.
601. Показать, что

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}},$$

где функция ошибок определяется формулой

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau e^{-\tau^2}.$$

603. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(t)}{n!} = eJ_0(2\sqrt{t}).$$

606. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(t)}{2^{n+1}} = e^{-t},\ t > 0.$$

Для данных изображений найти оригиналы

609. $F(p) = \dfrac{2e^{-p}}{p^3}$. 612. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p+3}$. **613**. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$. 619. $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

622. $F(p) = \dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$. 630. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

655. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$. 657. $x'' + 2x' = t\sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$.

742. Решить уравнение:

$$tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0.$$

747. Решить уравнение Чебышева-Эрмита

$$x'' - tx' + nx = 0,\ n = 1, 2, ...$$

$$a.\ x(0) = 1, x'(0) = 0, n = 2k;$$

$$b.\ x(0) = 0, x'(0) = 1, n = 2k+1.$$

Решить интегральные уравнения:

$$785.\ \phi(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)\phi(\tau)d\tau;$$

$$\mathbf{799}.\ \int_0^t J_0(t-\tau)\phi(\tau)d\tau = \sin t.$$

Задачи для практических занятий

1. 1.04(1-4,6), 1.06(1,2,3,6,9), 1.13(1-6,10,11), 1.21(1,4).
2. 8.01(3,4,7), 8.01a(1), 8.02(1), 8.08(4,5), 8.23(1,4), 8.30(2), 8.31(1), 8.51(1,6).
3. 9.06(1,4), 9.09(1,5), 9.16(1,4), 9.17(1,3).
4. 32.01(2), 35.03(1), 35.04(2,3), 35.05(1,3), 35.14(37,39,44).
5. 32.01(3), 35.19(1,3), 35.20(1), 35.22(56,59).
6. 32.01(4), 35.28(1,5,8), 35.29(76,79,82), 35.30(96).
7. 10.23a(1), 10.23(1,7), 6.20(4), 6.21(2), 11.04(1,3), 11.05(3), 11.06(1).
8. 19.01(1,2,6,8), 19.02(1,2,3,5), 19.07(1,3,7), 19.08(1,5), 20.01(2), 20.08(1), 20.09(1).
9. 21.02(1,2,3,7,11,12), 21.03(1,2,4), 21.09(1,2,6), 21.12(1,3,5,6).
10. 22.01(1,4), 22.02(1,6), 28.15(1,4), 28.03(3,9).
11. 28.05(1,6,11), 28.07(1,5), 28.09(1,5).
12. 28.22(2,5), 28.29(3,15), 28.25(1).
13. 511(a,v,g), 516, 528, 547(b), 581, 599,
600, 606, 609, 613, 622, 655, 742, 799.

Задачи для домашних заданий

1. 1.04(5,7), 1.05, 1.06(8), 1.07(4,10), 1.13(8,9), 1.21(2,7,8), 1.30, 1.49, 1.57.
2. 8.01a(2), 8.01(5,6), 8.06, 8.07, 8.08(2,6), 8.23(5), 8.29, 8.30(1,3,4), 8.31(2), 8.32(2), 8.51(2,5,8).
3. 9.06(2,5), 9.09(3,6), 9.10(1,4), 9.14, 9.15, 9.16(3,6), 9.17(2).
4. 32.01(1,5), 35.03(2,4), 35.04(1,5), 35.05(4), 35.13(3,5), 35.14(38,43,46,51).
5. 32.01(7), 35.19(2,4,5), 35.20(2-5), 35.22(55,63,64,67), 35.23(72), 35.21.
6. 32.01(6), 35.28(2,3,4,6,7), 35.29(80,84,86,88), 35.30(93,97).
7. 10.23a(2,3), 10.23(8), 6.20(3,5), 6.21(1) 11.01(2), 11.02(2), 11.04(2,4), 11.05(2), 11.10(3).
8. 19.01(3,5), 19.02(4,6,7), 19.07(2,4,6,8), 20.01(1,8), 20.06(5), 20.08(3), 20.09(2,5,8).
9. 21.02(4,5,8,10), 21.03(3,5,6), 21.09(3,8), 21.10(2,4,6), 21.12(2,4).
10. 22.01(2,3,5), 22.02(3,8), 22.05(5), 28.03(8,10), 28.15(3,5,7).
11. 28.05(5,8,9), 28.07(3,7,12), 28.09(6,10).
12. 28.22(3,9), 28.29(2,12,13), 28.25(4,13).
13. 511(d,e), 529, 546(v), 552, 582, 592, 597,
601, 603, 612, 619, 630, 657, 747, 785.